

Az Ørsted, a CHAMP és a SAC-C mesterséges holdak mágneses méréseinek spektrális analízise¹

KIS KÁROLY², WITTMANN GÉZA³

Az Ørsted, a CHAMP és a SAC-C mesterséges holdak totális mágneses méréseinek spektrális analízise a Yule–Walker- és a Burg-féle módszerekkel történt. Az analizált adatsorok 2001. július 28-án és 2001. augusztus 16-án végzett mérési sorozatok, melyeket az autoregresszív folyamat realizációjának tekintve, a folyamat együtthatóinak számát az Akaike-féle véges jóslási hiba és információs kritérium alapján lehet meghatározni. Az anomáliákban előforduló egyen- és kisfrekvenciás tartományt Gauss-féle felül áteresztő szűrő (az átviteli hullámhossztartomány <2320 km) alkalmazásával elimináltuk. Az Ørsted méréseiből meghatározott teljesítménysűrűség-spektrumokon a 2132 km, 1323 km, 463 km, 339 km hullámhosszúságnál határozhatók meg csúcsok; a CHAMP méréseiből meghatározott csúcsok a spektrumokban 2115 km, 1161 km, 891 km és 280 km hullámhosszaknál jelentkeznek. Ezek a meghatározott hullámhosszak a 2001. július 28-án végzett mérésekre vonatkoznak. A SAC-C regisztrátumok teljesítménysűrűség-spektrumain 2160 km, 230 km és 91 km hullámhosszaknál ismerhetők fel csúcsok.

KIS, K.²; WITTMANN, G.³: Spectral analysis of the magnetic measurements of the Ørsted, CHAMP, and SAC-C satellites

The power density spectra of the total magnetic measurements of the Ørsted, CHAMP, and SAC-C satellites are obtained by the Yule–Walker and Burg methods. Data series of July 28, 2001 and August 16, 2001 are analyzed. The analyzed data series have been regarded to autoregressive process and its order is determined by the finite prediction error and information criterion of Akaike. The DC and low-frequency range are eliminated by the application of Gaussian high-pass filter (transmitted wavelength range < 2320 km). 2132 km, 1323 km, 463 km, and 339 km wavelength peaks can be determined from the power density spectra of the Ørsted measurements; 2115 km, 1161 km, 891 km, and 280 km wavelength peaks are characteristics for the CHAMP power density spectra. These wavelengths are obtained from the measurements of July 28, 2001. A different peak at 91 km is obtained from the SAC-C measurements. The other peaks obtained from the SAC-C measurements are at 2160 km, 230 km, and 91 km wavelengths.

Bevezetés

A természeti jelenségekben bekövetkező ismétlődések — évszakok, időjárás, holdfázisok — mindig kiváltották a megfigyelők érdeklődését. Szamoszi PÜTHAGORASZ (Kr. e. 580–500) filozófiai iskolájának tanítása szerint a világon minden számbeli viszonyok szerint van rendezve. A püthagoraszai szférák távolsága, az akkor ismert hét bolygó szférája, olyan arányban vannak egymással, mint a lanthúr hosszának arányai a harmonikus hangoknál (oktáv 1:2; kvint 2:3; kvart 3:5).

A harmonikus analízisben használt *spektrum* terminus technicus a latin *specter* szóból származik, amely láthatóvá válást, megjelenést jelent. Ezt a szakkifejezést Sir Isaac NEWTON vezette be a prizma által felbontott fény frekvenciájának eloszlására, 1671-ben. A hullámmozgás periodicitásának matematikai tárgyalását szintén NEWTON használta először az 1687-ben megjelent *Principia mathematica philosophiae naturalis* című alapvető munkájában. A húros hangszerek rezgéseit leíró hullámegyenlet megoldását Daniel BERNOULLI publikálta 51 évvel később, 1738-ban, az egyenlet megoldása a húr rezgéseit szinuszoidális jelek összegeként írta le. Az összegben szereplő együtthatókat —

amelyeket később a Fourier-sor együtthatóinak neveztek el —, Leonhard EULER határozta meg 1755-ben. Jean Baptiste Joseph FOURIER a *Théorie analytique de la chaleur* (Hő analitikus elmélete) című munkájában a hőterjedést a harmonikus függvények: szinusz- és koszinuszfüggvények súlyozott összegeként írta le. Ezt a matematikai eljárást nevezik harmonikus analízisnek. A periodikus jelenségeket, mint például a légnomás változásait, az árapály ciklikus ingadozásait Sir William THOMPSON (Lord KELVIN) vizsgálta a XIX. század utolsó harmadában, és 1876-ban testvérével, James THOMPSONnal mechanikus elven működő harmonikus analízátort fejlesztett ki. Arthur A. MICHELSON és S. W. STRATON szintén mechanikus elven működő harmonikus analízátort használt a fényjelenségek vizsgálatához, eszközükkel 80 harmonikus együtthatót tudtak meghatározni. Sir Arthur SCHUSTER értékes vizsgálatokat végzett a harmonikus analízis alkalmazása során, 1897 és 1906 között részletesen vizsgálta a napfoltok számában megjelenő periodicitást. SCHUSTER felvetette az adatsorokban szereplő zaj esetleges torzító hatásának és a nem harmonikus eredetű periódusok jelenlétének vizsgálatát is, és javasolta a periodogram alkalmazását, amely a Fourier-sor együtthatóinak négyzetösszegéből áll. Meg kell jegyezni, hogy ezt a gondolatot George Gabriel STOKES már korábban, 1879-ben is felvetette. Az autoregresszív folyamatok alkalmazását az adatsorok analízisére Georg Udny YULE vezette be 1927-ben. E témában alapvető volt Norbert WIENER *Generalized Harmonic Analysis* című, 1930-ban megjelent munkája is, hiszen WIENER eredmé-

1 Beérkezett: 2006. február 16-án

2 MTA–ELTE Geofizikai és Környezetfizikai Kutatócsoport, H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c.

3 MOL Magyar Olaj- és Gázipari Rt. Geofizikai Felügyelet, H-1117 Budapest, Budafoki út 79.

neyi alapozták meg a jelenleg is használt harmonikus analízist. Értékes hozzájárulást jelentettek a Norman LEVINSON, John TUKEY és Jim COOLY által kifejlesztett matematikai eljárások, amelyek jól használhatók a harmonikus analízis alkalmazásakor.

A harmonikus analízis célkitűzése az adatsorok spektrális vizsgálata, jelen esetben az adatsorok teljesítménysűrűség-spektrumának meghatározása. Az alkalmazható eljárásokat a szakirodalomban JENKINS, WATTS [1968], ROBINSON, TREITEL [1980], KANASEWICH [1981], MARPLE [1987] igen részletesen tárgyalja.

A tanulmányba foglalt vizsgálatok célkitűzése a mesterséges holdak mágneses méréseinek spektrális analízise.

Mérési adatsorok

A vizsgált adatsorok az Ørsted, a CHAMP és a SAC-C mesterséges holdak mágneses mérései. Az adatsorok stacionárius sztochasztikus folyamat realizációinak tekinthetők, így azok véletlenszerűen ismétlődő, determinisztikus energia jelek szuperpozíciójaként származtathatók. WOLD [1938] megállapítása szerint egy stacionárius sztochasztikus folyamat fehér zaj folyamat és energia jelből áll, determinisztikus folyamat konvolúciójaként származtatható.

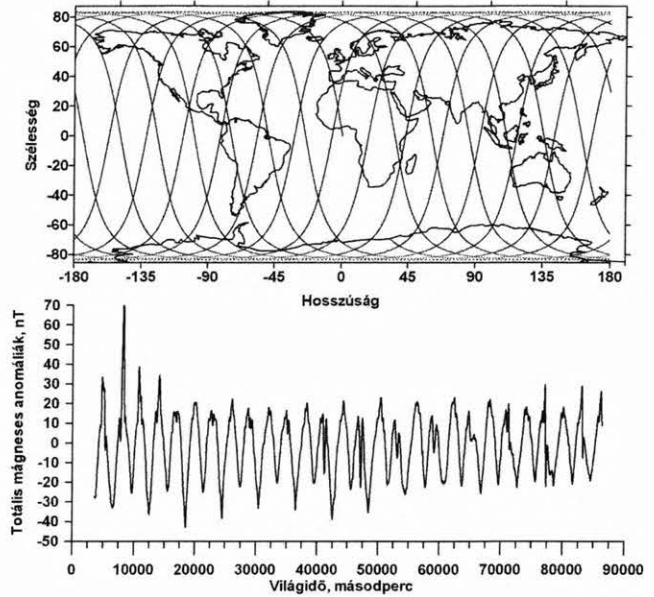
Az Ørsted dán mesterséges holdat az amerikai Vandenberg légítámaszpontból Delta-II rakétával bocsátották fel 96,48° inklinációjú Föld körüli pályára 1999. február 23-án. Az Ørsted pályájának apogeuma 865 km, perigeuma 649 km. A hold nodális periódusideje 99,99 perc. A mágneses tér mérésére Dán Műszaki Egyetemen kifejlesztett vektor (fluxgate), illetve a Laboratoire d'Electronique de Technologie et d'Instrumentation grenoble-i központjában készített skalár (overhauser) magnetométereket használnak. A magnetométerek pontossága $\pm 0,5$ nT. A magnetométerek érzékelőt 8 m távolságban helyezték el a mesterséges hold elektronikus egységeitől. A 2001. július 28-án és a 2001. augusztus 16-án az Ørsted által végzett mágneses mérések az 1. és a 2. ábrán láthatók. Az ábrák feltüntetik a pályák vetületét és a totális mágneses anomáliákat.

A CHAMP (*Challenging Mini Satellite Payload*) német fejlesztésű mesterséges holdat az oroszországi Pleszeck bázisról állították 87° inklinációjú Föld körüli pályára Koszmosz-3M rakétával 2000. július 15-én. A hold pályája közel kör alakú, felszíntől mért kezdeti magassága 454 km. A mesterséges hold keringési ideje 93,55 perc. A hold működését 5 évre tervezték, de még jelenleg is működik és a jelek szerint hosszabb ideig fog méréseket végezni. A CHAMP magnetométerei megegyeznek az Ørsted magnetométerekkel, az érzékelőket 4 m távolságban helyezték el az elektronikus egységektől. A 2001. július 28-án és a 2001. augusztus 16-án a CHAMP által végzett mágneses mérések a 3. és a 4. ábrán láthatók. Az ábrák feltüntetik a pályák vetületét és a totális mágneses anomáliákat.

A SAC-C (*Satelite de Aplicaciones Cientificas C*) argentin mesterséges holdat az amerikai Vandenberg légítámaszpontból bocsátották 98,2° inklinációjú kör alakú napszinkron pályára Delta-II rakétával, 2000. november 18-án. A SAC-C pályája közel kör alakú, perigeuma 701 km, míg apogeuma 704 km. A holdat a Dán Űrkutatási Kutatóintézetben kifejlesztett hélium magnetométerrel látták el. Az érzékelők 8 m távolságban vannak a hold központi részétől. A 2001. július 28-án és a 2001. augusztus 16-án a SAC-C

által végzett mágneses mérések az 5. és a 6. ábrán láthatók. Az ábrák feltüntetik a pályák vetületét és a totális mágneses anomáliákat. Mindhárom mesterséges hold adatait PURUCKER et al. [2002] publikálta.

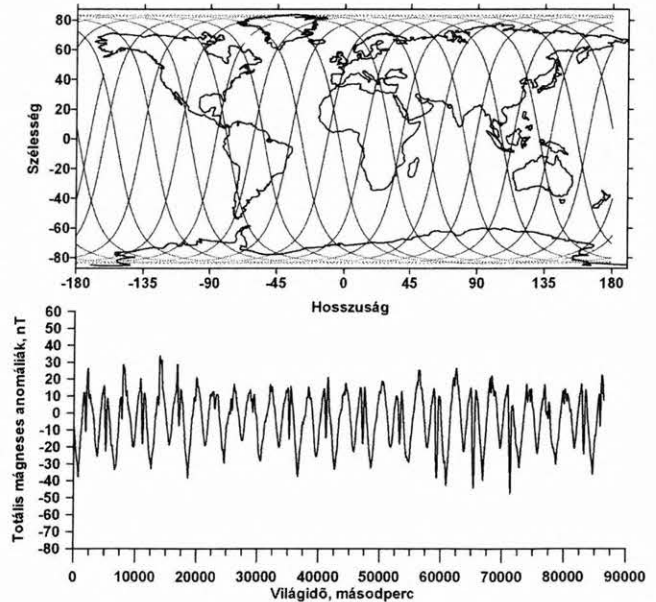
Ørsted mérési adatai 2001. július 29-án.



1. ábra. (a) Az Ørsted pályájának vertikális vetülete területtartó hengervetületben ábrázolva; (b) totális mágneses anomáliák nT egységekben a világidő függvényében, 2001. július 28-án

Fig. 1. (a) Lateral distribution of the Ørsted measurements plotted in cylindrical projection; (b) total magnetic anomalies in nT unit versus UT. The measurements were made at July 28, 2001

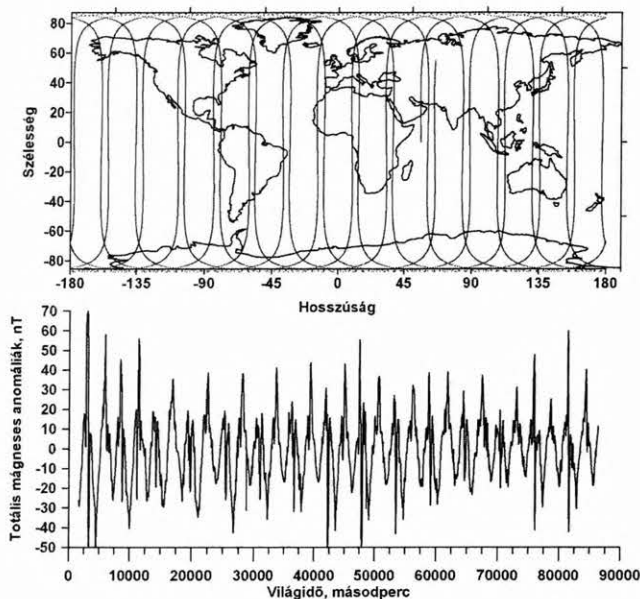
Ørsted mérési adatai 2001. augusztus 16-án.



2. ábra. (a) Az Ørsted pályájának vertikális vetülete területtartó hengervetületben ábrázolva; (b) totális mágneses anomáliák nT egységekben a világidő függvényében, 2001. augusztus 16-án

Fig. 2. (a) Lateral distribution of the Ørsted measurements plotted in cylindrical projection; (b) total magnetic anomalies in nT unit versus UT. The measurements were made at August 16, 2001

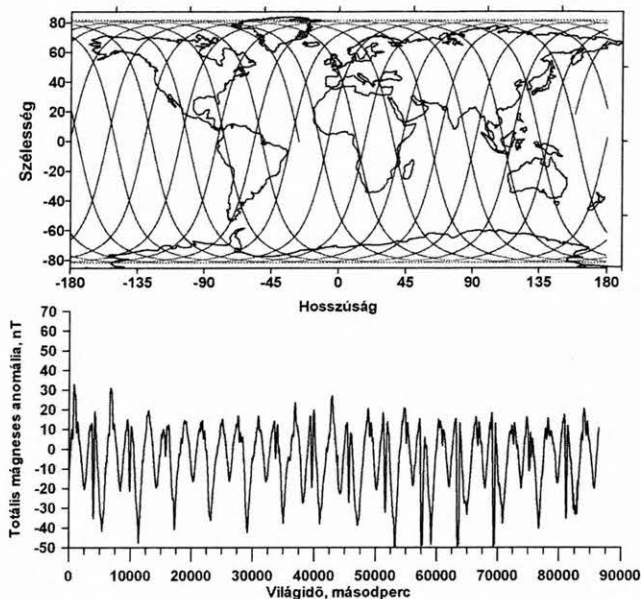
CHAMP mérési adatai 2001. július 28-án



3. ábra. (a) A CHAMP pályájának vertikális vetülete területtartó hengervetületben ábrázolva; (b) totális mágneses anomáliák nT egységekben a világidő függvényében, 2001. július 28-án

Fig. 3. (a) Lateral distribution of the CHAMP measurements plotted in cylindrical projection; (b) total magnetic anomalies in nT unit versus UT. The measurements were made at July 28, 2001

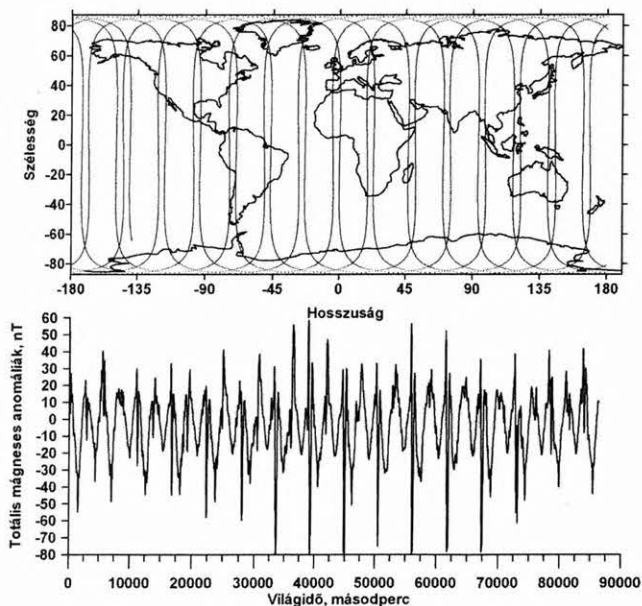
SAC-C mérési adatai 2001. július 28-án.



5. ábra. (a) Az SAC-C pályájának vertikális vetülete területtartó hengervetületben ábrázolva; (b) totális mágneses anomáliák nT egységekben a világidő függvényében, 2001. július 28-án

Fig. 5. (a) Lateral distribution of the SAC-C measurements plotted in cylindrical projection; (b) total magnetic anomalies in nT unit versus UT. The measurements were made at July 28, 2001

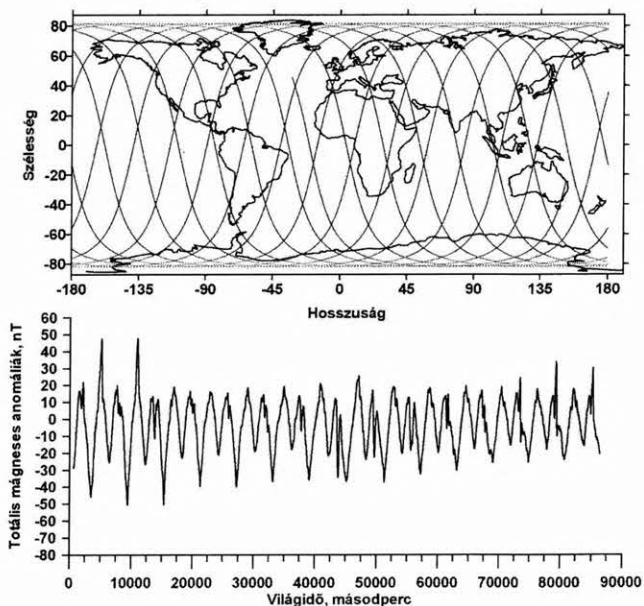
CHAMP mérési adatai 2001. augusztus 16-án.



4. ábra. (a) A CHAMP pályájának vertikális vetülete területtartó hengervetületben ábrázolva; (b) totális mágneses anomáliák nT egységekben a világidő függvényében, 2001. augusztus 16-án

Fig. 4. (a) Lateral distribution of the CHAMP measurements plotted in cylindrical projection; (b) total magnetic anomalies in nT unit versus UT. The measurements were made at August 16, 2001

SAC-C mérési adatai 2001. augusztus 16-án.



6. ábra. (a) A SAC-C pályájának vertikális vetülete területtartó hengervetületben ábrázolva; (b) totális mágneses anomáliák nT egységekben a világidő függvényében, 2001. augusztus 16-án

Fig. 6. (a) Lateral distribution of the SAC-C measurements plotted in cylindrical projection; (b) total magnetic anomalies in nT unit versus UT. The measurements were made at August 16, 2001

Az adatsorok közül kiválasztott napok közül 2001. július 28. mágneses nyugodt napnak számít, míg 2001. augusztus 16-án a poláris régióban történt erősebb háborgás.

A számításokhoz mindhárom mesterséges hold mágneses mérései 5 másodperces mintavételi távolsággal álltak rendelkezésre, ami körülbelül 38 kilométeres pálya menti távolságnak felel meg.

A mágneses anomáliákat a korrigált mérési adatok és a földi mágneses teret leíró Gauss-féle sorfejtés $n=13$ -ig tartozó értékeinek különbségeként határozták meg mindhárom mesterséges hold esetében. A Mauersberger-Lowes kritérium [LOWES 1974] szerint az $n<13$, illetve $n>13$ azoknak a követelményeknek felel meg, amelyek szétválasztják a földmagból és a földkéregből származó mágneses teret. A sorfejtésben az $n=13$ -nak mintegy 3000 km hullámhossz felel meg [BULLARD 1967].

A spektrális analízis elvégzése előtt szükséges az adatsorok tulajdonságainak összefoglalása.

Tekintsünk olyan azonos távolsággal mintavételezett adatsort, amely az időnek vagy egy térváltozónak a függvénye. Tegyük fel, hogy a véges vagy végtelen hosszúságú mérési jelsorozat $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k \dots$ elemei — amelyek komplex mennyiségek is lehetnek — energia jelet képeznek. Az energia jel definíciója:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k x_k^* < \infty \quad (1)$$

ahol a felső indexben szereplő * a komplex konjugáltat jelöli. A gyakorlatban a folyamatnak rendszerint csak egy realizációja áll rendelkezésre. Ergodikus folyamatok esetében a folyamat egyetlen realizációja is elegendő a statisztikus jellemzők meghatározására, azaz minden egyes realizáció jellemző a teljes ensemble-ra. Ergodikus folyamatokra igaz, hogy az l késleltetésű helyen a

$$\Phi_{xx}(l) = E\{x_k x_{k+l}\} \quad (2)$$

várható értékkel és a

$$\Phi_{xx}(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k x_{k-l}^* \quad (3)$$

ensemble átlaggal meghatározott autokovariancia-függvény azonos. A Φ_{xx} autokovariancia-függvény az origóra szimmetrikus jelet alkot, azaz $\Phi_{xx}(-l) = \Phi_{xx}(l)$.

Autoregresszív folyamatok

A lineáris sztochasztikus folyamatokhoz tartoznak az autoregresszív folyamatok. Az m -edrendű visszacsatolt autoregresszív folyamatot az

$$x_k = \alpha_1 x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-2} + \dots + \alpha_m x_{k-m} + n_k \quad (4)$$

összefüggés írja le, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ az autoregresszív folyamat együtthatóit, n_k a korrelálatlan fehér zaj folyamat k -adik realizációját jelenti [JENKINS, WATTS 1968; ROBINSON, TREITEL 1980]. Az n_k -t szokták a folyamat megújításának is nevezni.

Határozzuk meg az x_k autoregresszív folyamat $X(z)$ -vel jelölt z -transzformáltját:

$$X(z) = X(z) (\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_m z^m) + N(z) \quad (5)$$

felhasználva a z -transzformáltak késleltetési tulajdonságát, azaz $\alpha_1 z x_k = \alpha_1 x_{k-1}$, $\alpha_2 z^2 x_k = \alpha_2 x_{k-2}$, ... összefüggését. Az előző eredményt rendezve az

$$X(z) = \frac{N(z)}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_m z^m} \quad (6)$$

egyenletet kapjuk. Az x_k folyamat Fourier-transzformáltját a $z = e^{-j2\pi f \Delta x}$ helyettesítéssel kapjuk meg:

$$\mathfrak{F}\{x_k\} = \frac{\sigma_n}{1 - \alpha_1 e^{-j2\pi f \Delta x} - \alpha_2 e^{-j2\pi f 2\Delta x} - \dots - \alpha_m e^{-j2\pi f m \Delta x}} \quad (7)$$

ahol f a frekvencia, Δx a mintavételi távolság, σ_n pedig 0 várható értékű fehér zaj folyamat szórása. Az x_k folyamat teljesítménysűrűség-spektrumára az

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma_n^2}{|1 - \alpha_1 e^{-j2\pi f \Delta x} - \alpha_2 e^{-j2\pi f 2\Delta x} - \dots - \alpha_m e^{-j2\pi f m \Delta x}|^2} \quad (8)$$

eredményt kapjuk. A képletből látható, amennyiben a folyamat m rendjét és az α_k együtthatóit becsülni tudjuk, akkor a teljesítménysűrűség-spektrum meghatározható. A becsüléshez szükséges eljárások összefoglalása a következő fejezetekben található meg.

Yule-Walker-féle spektrum becsülés

Tekintsük a (4) egyenlettel adott diszkrét m -edrendű autoregresszív folyamatot. Szorozzuk meg a (4) egyenletet az x_{k-l} változóval, így az

$$x_{k-l} x_k = \alpha_1 x_{k-l} x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-l} x_{k-2} + \dots + \alpha_m x_{k-l} x_{k-m} + x_{k-l} n_k \quad (9)$$

eredményt kapjuk. Ha meghatározzuk az előző egyenlet várható értékét az $l > 0$ esetben, akkor

$$\Phi_{xx}(l) = \alpha_1 \Phi_{xx}(l-1) + \alpha_2 \Phi_{xx}(l-2) + \dots + \alpha_m \Phi_{xx}(l-m) \quad (10)$$

egyenlőséget kapjuk, ha felhasználjuk a (2) egyenletet és az autokovariancia-függvény origóra vonatkozó szimmetriáját, továbbá az x_{k-l} korrelálatlanságát az n_k -val. Tekintsük a (9) egyenlet várható értékét az $l=0$ esetben, ekkor a

$$\Phi_{xx}(0) = \alpha_1 \Phi_{xx}(1) + \alpha_2 \Phi_{xx}(2) + \dots + \alpha_m \Phi_{xx}(m) + \sigma_n^2 \quad (11)$$

eredményt kapjuk. Ha a (10) egyenletet az $l=1, 2, \dots, m$ értékekre is felírjuk, akkor az úgynevezett Yule-Walker-féle egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(1) &= \alpha_1 \Phi_{xx}(0) + \alpha_2 \Phi_{xx}(1) + \dots + \alpha_m \Phi_{xx}(m-1) \\ \Phi_{xx}(2) &= \alpha_1 \Phi_{xx}(1) + \alpha_2 \Phi_{xx}(0) + \dots + \alpha_m \Phi_{xx}(m-2) \\ &\vdots \\ \Phi_{xx}(m) &= \alpha_1 \Phi_{xx}(m-1) + \alpha_2 \Phi_{xx}(m-2) + \dots + \alpha_m \Phi_{xx}(0) \end{aligned} \quad (12)$$

Amennyiben az autokovariancia-függvény értékeit ismerjük, az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ együtthatók meghatározhatók. A (12) egyenletrendszer autokovariancia-mátrixa egyenletes kontinuáns mátrix (azaz speciális Toeplitz típusú mátrix), továbbá a nevezett mátrix hermitikus is, azaz megegyezik transzponáltjának konjugáltjával. Toeplitz típusú egyenletrendszer a Levinson-féle algoritmussal [ROBINSON, TREITEL 1980] oldható meg, de ehhez szükséges az autokovariancia-függvény megfelelő késleltetéshez tartozó értékeinek ismerete. Az autokovariancia-függvény numerikus becslésére vonatkozó eljárásokat ismertet JENKINS, WATTS [1968].

Információelméleti entrópia és teljesítménysűrűség-spektrum

Az információelméleti entrópiát C. E. SHANNON [1948] vezette be. Az entrópia mind folytonos, mind diszkrét rendszerekre értelmezhető, és kifejezi a rendszer rendezetlenségének mértékét. Diszkrét rendszerek H entrópiáját a

$$H = -C \sum_{k=1}^N p_k \log p_k \quad (13)$$

összefüggés írja le, ahol p_k az eseményhalmazon értelmezett k -adik esemény bekövetkezési valószínűsége, C konstans a logaritmus alapszámától függő érték (a természetes alapú logaritmus esetében $C=1$). A H entrópiafüggvénynek akkor van maximuma, ha az összes p_k egyedi valószínűség egyenlő. Végtelen elemszámú folyamatokra a h entrópia-sűrűséget használják:

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H}{N+1} \quad (14)$$

Az $S_{xx}(f)$ teljesítménysűrűség-spektrum és az entrópia-sűrűség között a

$$h = \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log S_{xx}(f) df \quad (15)$$

vagy a

$$h = \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(k) e^{-j2\pi f k \Delta x} \right] df \quad (16)$$

összefüggés írható fel, ahol f_N a Nyquist-frekvenciát, míg Φ_{xx} az autokovariancia-függvényt és Δx a mintavételi távolságot jelentik [SMYLIE, CLARKE, ULRICH 1973].

A Burg-féle spektrumbecslés

A J. P. BURG javasolta maximális entrópiájú spektrumbecslés a múlt század 70-es éveitől kezdve terjedt el [BURG 1968, 1972]. Az eljárás — amelyet az irodalomban a *maximum entropy method* angol kifejezés után *MEM* betűszóval jelölnek — rövid idő alatt népszerűvé vált. Az eljárás részletes összefoglalása ULRICH [1972], ULRICH, BISHOP [1975] és ULRICH, CLAYTON [1976] tanulmányai-ban található meg. SMYLIE, CLARKE, ULRICH [1973] a Föld forgási periódusában bekövetkező változásokat elemezték, CURRIE [1973a, 1973b] a napfoltok számában előforduló periódusok analízisére, COURTILOT, LEMOUËL

[1976] a mágneses obszervatóriumok regisztrátumainak elemzésére, VICENTE, CURRIE [1976] a sarkmagasság ingadozás hosszabb idejű periódusainak meghatározására használták a maximális entrópiájú spektrumbecslést.

A Burg-féle teljesítménysűrűség-spektrum meghatározásának az alap gondolata a következőkben foglalható össze. Egy diszkrét adatsor entrópiásűrűsége arányos a teljesítménysűrűség-spektrum logaritmusának a Nyquist-intervallumon vett integráljával ((16) egyenlet). Maximalizáljuk úgy az adatsor entrópiáját, hogy az

$$\Phi_{xx}(k) = \int_{-f_N}^{f_N} S_{xx}(f) e^{j2\pi f k \Delta x} df \quad (17)$$

egyenlettel meghatározott autokovariancia-függvényre előírt feltétel teljesüljön. A maximum feltételből az $S_{xx}(f)$ teljesítménysűrűség-spektrumra az

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^m \gamma_k e^{-j2\pi f k \Delta x} \right|^2} \quad (18)$$

eredmény kapható, amely azonos formájú a (8) egyenlettel, azaz a γ_k együtthatókat kell meghatározni a teljesítménysűrűség-spektrum meghatározásának érdekében.

A spektrumbecslési feladat más módon is megfogalmazható. Tekintsük a (4) egyenlettel megadott autoregresszív folyamatot leíró összefüggést:

$$\alpha_0 x_k - \alpha_1 x_{k-1} - \alpha_2 x_{k-2} - \dots - \alpha_m x_{k-m} = n_k \quad (19)$$

($\alpha_0=1$). Olyan α_k együtthatókat kívánunk meghatározni, amelyekkel a bemeneti adatokat konvolválva az eredmény fehér zaj sorozat lesz. A fehér zaj adatsor elemei korrelálatlanok, azaz a legnagyobb rendezetlenséget eredményezik, másképp fogalmazva maximalizálják az entrópiát.

Azt is meg lehet mutatni, hogy az egységnyi távolságú jóslási hibaszűrő egyenleteiben szereplő w_k együtthatók — előjelüktől eltekintve — azonosak a Burg-féle levezetésben található γ_k mennyiségekkel.

Az optimum szűrőtervezés alap gondolata olyan w_k együtthatók tervezése, amelyekkel végzett konvolúció a legjobban közelíti a művelet d_k kívánt kimenetét. A kívánt és a tényleges y_k kimenet különbsége képezze az ε_k hibaszorozatot:

$$\varepsilon_k = d_k - y_k \quad (20)$$

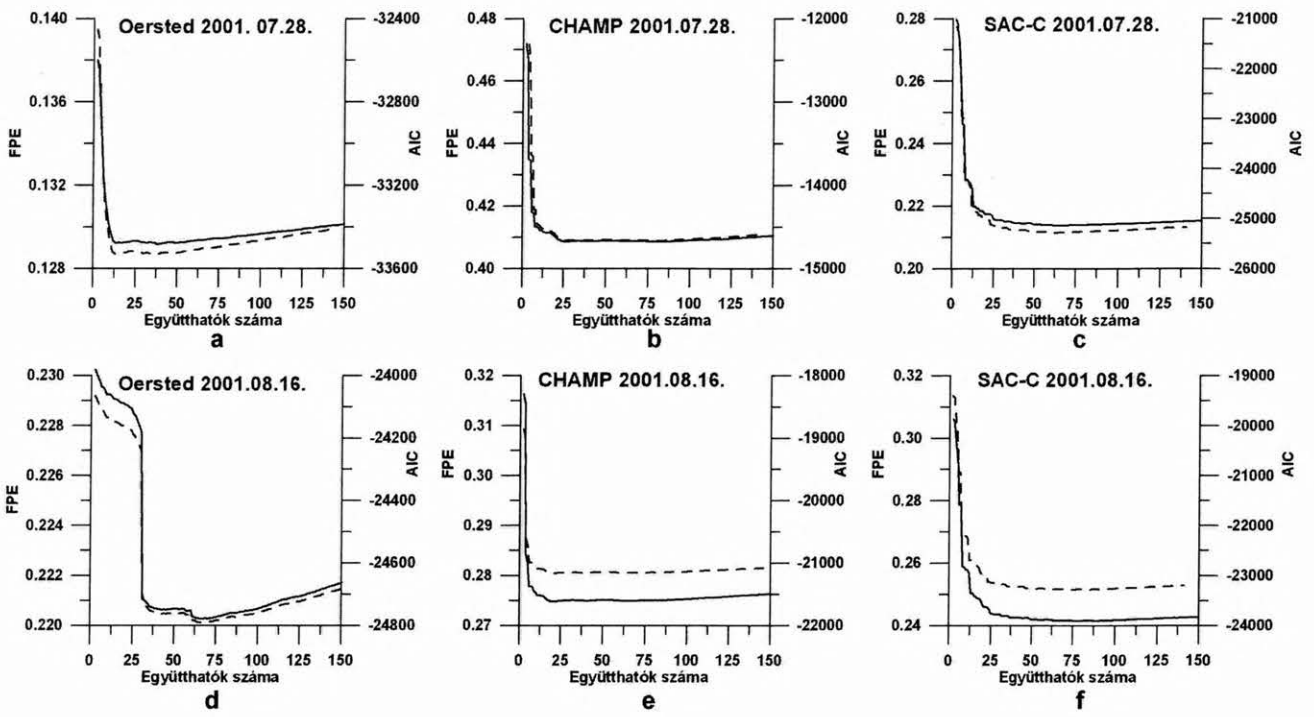
A hiba teljesítménye legyen

$$\left(d_k - \sum_{l=0}^{m-1} w_l x_{k-l} \right)^2 = \min. \quad (21)$$

A w_k együtthatók szerinti parciális deriválás után a

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \dots & \Phi_{xx}(m-1) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \dots & \Phi_{xx}(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(m-1) & \Phi_{xx}(m-2) & \dots & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{dx}(0) \\ \Phi_{dx}(1) \\ \vdots \\ \Phi_{dx}(m-1) \end{bmatrix} \quad (22)$$

egyenletrendszert kapjuk, ahol Φ_{dx} a kívánt és a bemeneti jelek keresztkovariancia-függvénye.



7. ábra. Az Akaike-féle véges jóslási hiba (FPE) folytonos vonallal jelölve és az Akaike-féle információs kritérium (AIC) szaggatott vonallal jelölve az autoregresszív folyamat rendje függvényében; a) az Ørsted 2001. július 28-án végzett mérései esetében; b) a CHAMP 2001. július 28-án végzett mérései esetében; c) a SAC-C 2001. július 28-án végzett mérései esetében; d) az Ørsted 2001. augusztus 16-án végzett mérései esetében; e) a CHAMP 2001. augusztus 16-án végzett mérései esetében; f) a SAC-C 2001. augusztus 16-án végzett mérései esetében

Fig. 7. The Akaike's finite prediction error (FPE) and the Akaike's information criteria (AIC) versus the order of the autoregressive process are indicated by solid and dashed line, respectively; a) the Ørsted measurements at July 28, 2001; b) the CHAMP measurements at July 28, 2001; c) the SAC-C measurements at July 28, 2001; d) the Ørsted measurements at August 16, 2001; e) the CHAMP measurements at August 16, 2001; f) the SAC-C measurements at August 16, 2001

Alkalmazzuk ezt az eredményt az m elemű jóslási hibaszűrőre, feltételezve, hogy a jóslási távolság egységnyi! Ekkor a jóslási hibaszűrőre vonatkozó egyenletrendszer a

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \dots & \Phi_{xx}(m-1) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \dots & \Phi_{xx}(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(m-1) & \dots & \Phi_{xx}(0) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}(1) \\ \Phi_{xx}(2) \\ \vdots \\ \Phi_{xx}(m) \end{bmatrix} \quad (23)$$

alakot ölti, ugyanis a $\Phi_{dx}(l) = \Phi_{xx}(l+1)$. Módosítsuk az előző egyenletrendszert olyan módon, hogy mindegyik sorából vonjunk le a megfelelő autokovariancia-függvényt: a $\Phi_{xx}(1)$ -et, ... $\Phi_{xx}(m)$ -et, azaz

$$\begin{aligned} -\Phi_{xx}(1) + \Phi_{xx}(0)w_0 + \Phi_{xx}(1)w_1 + \dots + \Phi_{xx}(m-1)w_{m-1} &= 0 \\ -\Phi_{xx}(2) + \Phi_{xx}(1)w_0 + \Phi_{xx}(0)w_1 + \dots + \Phi_{xx}(m-2)w_{m-1} &= 0 \\ \vdots & \\ -\Phi_{xx}(m) + \Phi_{xx}(m-1)w_0 + \Phi_{xx}(m-2)w_1 + \dots + \Phi_{xx}(0)w_{m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

A következő lépésben egészítsük ki az előző egyenletrendszert a

$$-\Phi_{xx}(0) + \Phi_{xx}(1)w_0 + \Phi_{xx}(2)w_1 + \dots + \Phi_{xx}(m)w_{m-1} = -P_{m+1} \quad (25)$$

egyenlettel, ahol P_{m+1} az átlagos kimeneti teljesítmény. Így az egyenletrendszer mátrix formában a

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \dots & \Phi_{xx}(m) \\ \Phi_{xx}(1) & \Phi_{xx}(0) & \dots & \Phi_{xx}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(m) & \dots & \Phi_{xx}(0) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -w_0 \\ \vdots \\ -w_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

alakot veszi fel. Ezt a formát nevezik Yule-Walker-féle általánosított egyenletrendszernek. Vezessük be a $\gamma_0=1$, $\gamma_l = -w_0, \dots, \gamma_m = -w_{m-1}$ együtthatókat az egységnyi távolságú jóslási hibaszűrőre! Így az egyenlet az

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx}(0) & \Phi_{xx}(1) & \dots & \Phi_{xx}(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{xx}(m) & \Phi_{xx}(m-1) & \dots & \Phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

formában írható le.

Akaike-féle kritériumok az autoregresszív folyamat rendjének becslésére

Mind a Yule–Walker-, mind a Burg-féle eljárás a megfigyelt adatsorokat leíró autoregresszív folyamatok együttműködésének és a σ_n szórású fehér zaj folyamat értékeinek becslésére vonatkozik. Amennyiben ezeket a mennyiségeket ismerjük, a mérési adatsor teljesítménysűrűség-spektrumát a (8) egyenlettel becsülni tudjuk. Az eljárások alkalmazása megkívánja az együttműködés m rendjének meghatározását. Az együttműködés rendjének meghatározására AKAIKE [1969; 1974] dolgozott ki kritériumokat. Az Akaike-féle véges jóslási hiba (Finite Prediction Error, FPE) az

$$FPE(m) = \sigma_m \left(\frac{N + (m + 1)}{N - (m + 1)} \right) \quad (28)$$

összefüggéssel írható le, ahol N a mérési adatok száma, m az autoregresszív folyamat rendje, σ_m megegyezik a (8) egyenletben szereplő σ_n mennyiséggel. Az Akaike-féle véges jóslási hiba alkalmazása megkívánja, hogy az adatok zéró középértékkel rendelkezzenek, azaz az átlagértéket le kell vonni minden egyes adatból. Az alkalmazás során kiderült, hogy a kritérium rendszerint kisebb értéket ad a tényleges rendnél. AKAIKE [1974] tanulmányában más jellegű követelményt, az Akaike-féle információs kritériumot (Akaike Information Criterion, AIC) javasolta, amely

$$AIC(m) = N \ln(\sigma_m) + 2m \quad (29)$$

alakú. Az $N \rightarrow \infty$ esetben az FPE és AIC aszimptotikusan megegyezik.

A mérési adatsorok spektrális analízise

A feldolgozásra kerülő három mesterséges hold méréséből meghatározott, az 1–6. ábrákon bemutatott totális mágneses anomáliák spektrális analízisének első lépése az adatsorok felül áteresztő szűrése. Ez a feldolgozási lépés azért szükséges, mert az anomáliákat a földi mágneses teret leíró sorfejtés $n=13$ -ig tartozó értékeihez viszonyítva határozzák meg. Így az adatsorok csak 3000 km-nél rövidebb hullámhosszú anomáliákat tartalmaznak. Az adatokat közvetlenül analizálva látható, hogy a hosszabb hullámhosszú tartomány nagy energiával rendelkezik, míg a rövidebb hullámhosszú anomáliák viszonylag kis amplitúdójú csúcsokat hoznak létre a teljesítménysűrűség-spektrumban. A felül áteresztő szűrő átviteli függvénye

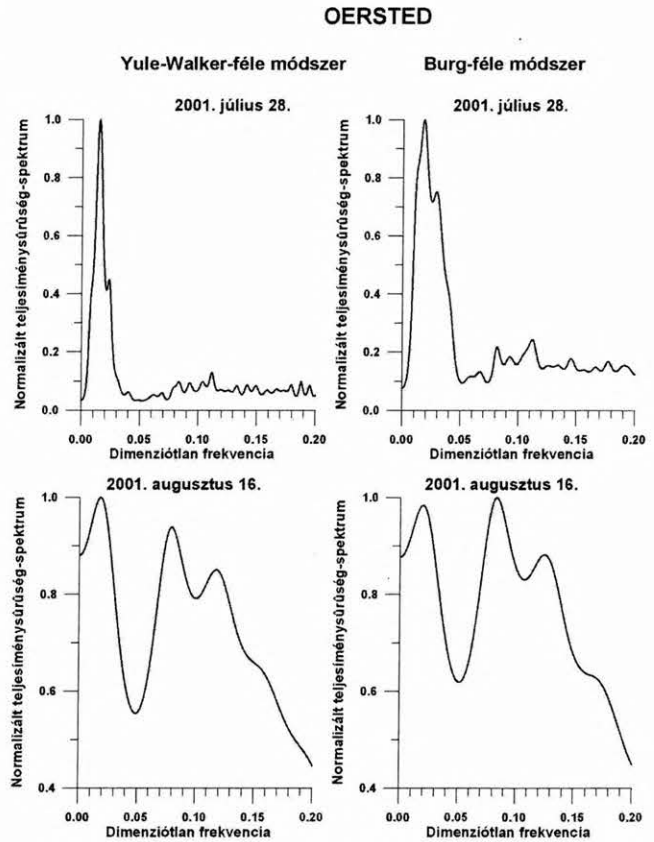
$$S(f', k) = 1.0 - \exp(-(kf')^2), \quad (30)$$

ahol f' a dimenziótlon frekvenciát jelenti. A k paraméter megfelelő megválasztásával, a -3 dB erősítéssel definiált felül áteresztést tekintve, a $k=36$ esetben (5 s vagy 38 km mintavétel esetében) az adatsor csak 2320 km-nél rövidebb hullámhosszakat tartalmaz.

A feldolgozás második lépése: az Akaike-féle véges jóslási hiba és információs kritérium alapján az autoregresszív folyamatnak tekintett adatsorok rendjének meghatározása. A 7. ábra a három mesterséges hold méréseiből meghatározott totális mágneses anomáliákat leíró autoregresszív folyamatok rendjének meghatározását illusztrálja. A véges

jóslási hiba (FPE) és az Akaike-féle információs kritérium (AIC) értékei láthatók az alkalmazott autoregresszív folyamat rendjének függvényében. A görbék minimuma általában 25 együttműködés rendnél jelentkezik. Lényegesen több együttműködés használata esetében jobb lesz a teljesítménysűrűség-spektrumok felbontása, de ez fiktív csúcsok megjelenését is okozhatja.

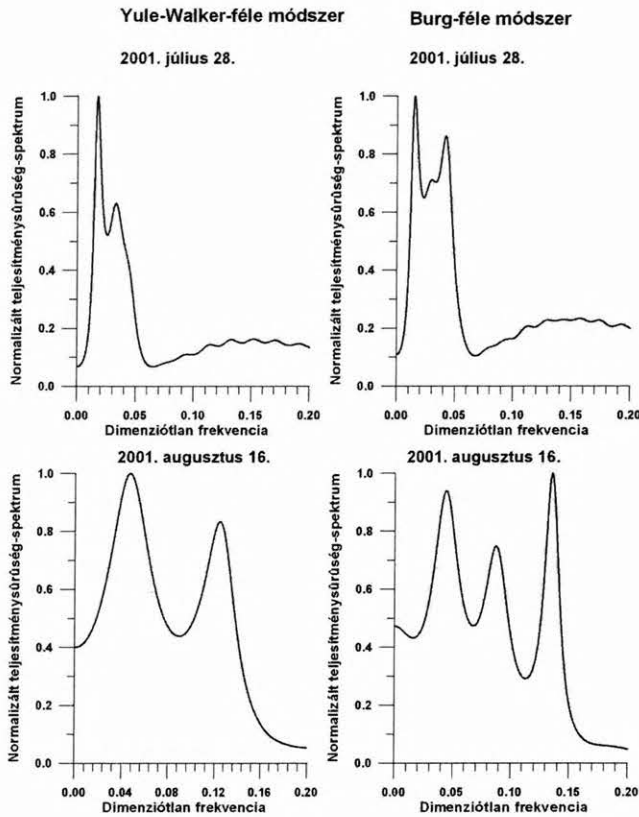
A 8., a 9. és 10. ábrán a teljesítménysűrűség-spektrumokat a dimenziótlon frekvencia függvényében ábrázoltuk. A dimenziótlon frekvenciából úgy határozható meg az idő- és távolságfüggő hullámhossz, hogy az 5 s-os, illetve az átlagos 38 km-es mintavételi távolságot osztjuk a dimenziótlon frekvenciával. A 8., 9. és 10. ábrán bemutatott teljesítménysűrűség-spektrumok normalizáltak, azaz maximális értékükkel osztva ábrázoltuk. A spektrumokon azokat a csúcsokat tekintettük szignifikánsnak, amelyek 0,2-nél nagyobbak. A 0,2 dimenziótlon frekvenciánál nagyobb tartomány rendszerint zajszerű ingadozást tartalmaz, ezért ezt a tartományt a 8. és a 9. ábráról elhagytuk. Általánosságban megállapítható, hogy a Burg-féle spektrum felbontóképessége hatékonyabb.



8. ábra. Az Ørsted totális mágneses anomáliáinak Yule–Walker-féle módszerrel (első oszlop) és Burg-féle módszerrel (második oszlop) meghatározott normalizált teljesítménysűrűség-spektruma a dimenziótlon frekvencia függvényében; az első sor a 2001. július 28-án végzett, míg második sora a 2001. augusztus 16-án végzett mérésekre vonatkozik

Fig. 8. Normalized power density spectra of the Ørsted's total magnetic anomalies determined by the Yule–Walker (first column) and Burg methods (second column), respectively; the first row shows the spectra of July 28, 2001, second row shows the spectra August 28, 2001. The spectra are plotted versus dimensionless frequency

CHAMP



9. ábra. A CHAMP totális mágneses anomáliáinak Yule–Walker-féle módszerrel (első oszlop) és Burg-féle módszerrel (második oszlop) meghatározott normalizált teljesítménysűrűség-spektruma a dimenziótlan frekvencia függvényében; az első sor a 2001. július 28-án végzett, míg második sora a 2001. augusztus 16-án végzett mérésekre vonatkozik

Fig. 9. Normalized power density spectra of the CHAMP's total magnetic anomalies determined by the Yule–Walker (first column) and Burg methods (second column), respectively; the first row shows the spectra of July 28, 2001, second row shows the spectra August 28, 2001. The spectra are plotted versus dimensionless frequency

A 8. ábrán az Ørsted méréseiből meghatározott teljesítménysűrűség-spektrumok láthatók. A 2001. július 28-án, egy mágnesesen nyugodt napon 2132 km, 1323 km, 463 km, 339 km hullámhosszágnál jelentkeznek csúcsok a teljesítménysűrűség-spektrumokon, míg 2001. augusztus 16-án, egy mágnesesen kissé háborgatott napon 2161 km, 483 km és 324 km hullámhosszak mutatnak csúcsokat.

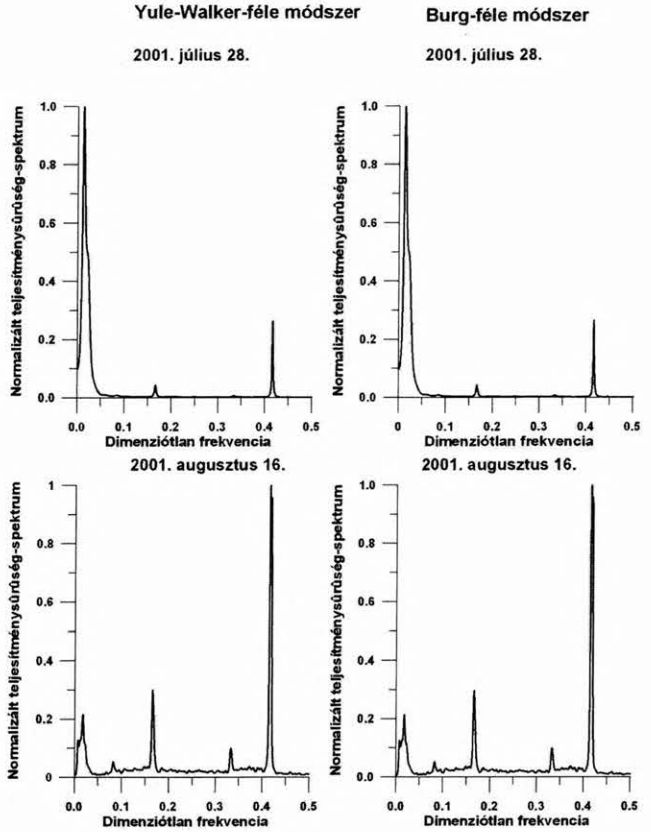
A 9. ábrán a CHAMP méréseiből meghatározott teljesítménysűrűség-spektrumok láthatók. A mágnesesen nyugodt napon meghatározott spektrumok 2115 km, 1161 km és 891 km hullámhossz esetében jelentkeznek csúcsok, míg a mágnesesen háborgatott napon a maximumok 862 km, 435 km és 280 km hullámhosszakon jelentkeznek.

A 10. ábrán a SAC-C méréseiből meghatározott teljesítménysűrűség-spektrumok kerültek ábrázolásra a 0–0,5 intervallumban. Mind a négy számítás szignifikáns csúcsokat mutat a 91 km-es hullámhossz esetében. Ez jellegzetes eltérés mind az Ørsted, mind CHAMP méréseiből meghatározott teljesítménysűrűség-spektrumokhoz viszonyítva. A

spektrumokban jelentkező további hullámhosszak: 2160 km és 230 km. Az eltérés valószínű oka, hogy a SAC-C nap-szinkron pályáján kering.

Az elvégzett spektrumanalízisek célja: a mágneses mérésekből levezethető anomália-térképek hullámhossztartományának meghatározása. A hosszabb hullámhosszú tartomány valószínűleg a kontinentális méretű globális mágneses anomáliák hatását tükrözi, míg a rövidebb hullámhosszúságú tartomány a lokális mágneses hatók következtében jelenik meg a teljesítménysűrűség-spektrumokban.

SAC-C



10. ábra. A SAC-C totális mágneses anomáliáinak Yule–Walker-féle módszerrel (első oszlop) és Burg-féle módszerrel (második oszlop) meghatározott normalizált teljesítménysűrűség-spektruma a dimenziótlan frekvencia függvényében; az első sor a 2001. július 28-án végzett, míg második sora a 2001. augusztus 16-án végzett mérésekre vonatkozik

Fig. 10. Normalized power density spectra of the SAC-C's total magnetic anomalies determined by the Yule–Walker (first column) and Burg methods (second column), respectively; the first row shows the spectra of July 28, 2001, second row shows the spectra August 28, 2001. The spectra are plotted versus dimensionless frequency

Köszönetnyilvánítás

A tanulmányba foglalt kutatások az OTKA T 038008 számú pályázatának keretében készültek.

HIVATKOZÁSOK

- AKAIKE H. 1969: Power spectrum estimation through autoregressive model fitting. *Ann. Inst. Statist. Math.* **27**, 407–419
- AKAIKE H. 1974: A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automatic Control.* **AC-19**, 716–723
- BULLARD E. C. 1967: The removal of trend from magnetic surveys. *Earth and Planetary Science Letters* **2**, 293–300
- BURG J. P. 1968: A new analysis technique for time series data, presented at Advanced Study Institute on Signal Processing, NATO, Enschede, Nederland
- BURG J. P. 1972: The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra. *Geophysics* **37**, 375–376
- COURTILLOT V. E., LEMOUËL J. L. 1976: Time variations of the Earth's magnetic field with a period longer than two months. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **12**, 237–240
- CURRIE R. G. 1973a: Fine structure in the sunspot spectrum 2 to 70 years. *Astrophysics and Space-Sciences* **20**, 509–518
- CURRIE R. G. 1973b: Geomagnetic line spectra 2 to 70 years. *Astrophysics and Space-Sciences* **21**, 425–438
- JENKINS G. M., WATTS D. G. 1968: *Spectral Analysis and its Applications*. Holden-Day, San Francisco, Düsseldorf, Johannesburg, London, Panama, Singapore, Toronto
- KANASEWICH E. R. 1981: *Time Sequence Analysis in Geophysics*. The University of Alberta Press
- LOWES F. J. 1974: Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **36**, 717–730
- MARPLE S. L. Jr. 1987: *Digital Spectral Analysis*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey
- PURUCKER M. E., MCCREADIE H., VENNERSTORM S., HULOT G., OLSEN N., LÜHR H. 2002: Virtual Session: New magnetic field satellites
- ROBINSON E. A., TREITEL S. 1980: *Geophysical Signal Analysis*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey
- SHANNON C. E. 1948: A mathematical theory of communication. *Bell. Syst. Tech. J.* **27**, 379–423
- SMYLIE D. E., CLARKE G. K. C., ULRYCH T. J. 1973: Analysis of irregularities in the Earth's rotation. *In: BOLT B. A. (Ed.) Methods in Computational Physics*. Academic Press, New York, London, 391–430
- ULRYCH T. J. 1972: Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids. *Journal of Geophysical Research* **77**, 1396–1400
- ULRYCH T. J., BISHOP T. N. 1975: Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. *Review of Geophysics and Space Physics* **13**, 183–200
- ULRYCH T. J., CLAYTON R. W. 1976: Time series modeling and maximum entropy. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **12**, 188–200
- VICENTE R. O., CURRIE R. G. 1976: Maximum entropy spectrum of long-period polar motion. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **46**, 67–73
- WOLD H. 1938: A study in the analysis of stationary time series. Thesis University of Stockholm (második kiadás: Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1954)